Q1: % pour 6 $\gtrsim$ 80%

Q2: les methodes de preuves ne sont pas imposées mais suggérées. Toute preuve correcte donne ts les pts

Q3: Quand on a des quotient (pas un ssgpe normal soit par un ideal ds un anneau commutatif)

l'objet quotient st un ~~en~~ ensemble de classes d'equiv pour une relation (d'equivalence) de "congruence" et après on montre que les loi de gpe ou d'anneau "descendent" au quotient par la "projection"

$$\pi_I : a \in A \longrightarrow \underbrace{a+I}_{} \in A/I$$

classe de congruence à $a \pmod{I}$

Q4: comment mq quelque chose est un A-module :

- verifier les axiomes (!)
- en general le "A-module" qui veut etudier est un ss module d'un A-module existent ⇝ critere de sous-module ou bien voir l'object comme le noyau ou l'image

d'un morphisme de A-modules.

- ou encore une intersection de A-modules.

Q5: Thm 7.3

A partir de (7.4.2) on a défini

$$v_i' = v_i - \frac{x_{i,d}}{x_{f,d}} v_f$$

$\rightsquigarrow$ $v_f' = 0$

et les v_i' sont CL des vecteurs de la base de référence

$\{e_1, \dots, e_d\}$

tq la dernière coordonnée (en e_d) vaut 0

$\rightsquigarrow$ les v_i' sont CL des vecteurs $\{e_1, \dots, e_{d-1}\} \leftarrow$ engendre un SEV de dim $d-1$

Ce qui permet d'appliquer la récurrence

une fois qu'on a mq $\{v_i' \ i=1,\dots,f-1\}$ est libre

$\rightsquigarrow f-1 \leq d-1 \Rightarrow f \leq d.$

Q6: Si $V \supset B$ = Base

$\varphi : V \longrightarrow W$ et $\varphi(B)$ pas génératrice de W

Comme $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}(\varphi(B))$ cela implique que $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}\,\varphi(B) \neq W$

$\rightsquigarrow$ φ pas surjective.

et dém si $\varphi(B)$ non libre alors φ pas injective:

$\varphi(B)$ non libre $\Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_d \in K$ non tous nuls tq

$$\lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_d \varphi(e_d) = 0_W$$

$$\rightsquigarrow \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d) = 0_W$$

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d \neq 0_V \text{ et } v \in \ker \varphi.$$

Q7 : les inconnue principale si elle sont ecrite $x_1, \dots, x_d$ sont celle dont l'indice est une position de pivot et les libres sont les autres.

Q8: un forme multilinéaire est une

app $\Lambda : V^n \longrightarrow K$

$(v_1, \dots, v_n) \longrightarrow \Lambda(v_1, \dots, v_n)$

linéaire en chacune des variables

$v_1, \dots, v_n$

et si $n=1$ Λ est juste une forme linéaire,

⚠ Si V est un K-ev alors

V^n est aussi un K-ev

$$(v_1, \dots, v_n) + \lambda(v_1', \dots, v_n') = (v_1 + \lambda v_1', \dots, v_n + \lambda v_n')$$

V^n admet des formes lineaires

$$l : V^n \longrightarrow K$$

Mais si $n \neq 1$ ces formes linéaire ne soit pas n-multilinéaire.

(pas linéaire en chacun des $v_1, \ldots, v_n$)

Q 8 : etant donne $M \in \mathcal{M}_{d' \times d}(K)$

de rang $r \; (\leqslant \min(d, d'))$

on sait que

$$M \text{ est equivalente a } \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1 \; \ddots \; 0}}^{r} \hphantom{\; 0} \\ \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Preuve : on identifie M à une AL

$$M \leftrightarrow \varphi \in \mathrm{Hom}(V,W) \quad \left(\text{ex. } \begin{array}{l} V = K^{d} \\ W = K^{d'} \end{array}\right)$$

$M = \mathrm{mat}_{B',B}\, \varphi$ et on utilise les base

de V et W fournie par le thm NI

et on obtient $\quad \mathrm{mat}_{B''',B''}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Que sont B'' et B'''

Soit $B'_I = \{f_1, \dots, f_r\}$ base de l'image

on la complète en $\{f_{r+1}, \dots, f_{d'}\}$

en $B''' = B'_I \sqcup \{f_{r+1}, \dots, f_{d'}\}$

Chaque $f_i = \varphi(v_i)$ $i = 1 \dots r$

et $\{f_1, \dots, f_r\}$ = libre $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_r\}$ et libre

et que si $\{v_{r+1}, \dots, v_d\}$ = base de $\ker \varphi$

$B^n = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_d\}$ = base de V

$$\mathrm{mat}_{B'^n,B^n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\varphi(v_1) = f_1$ $\quad \varphi(v_2) = f_2$ $\quad \varphi(v_r) = f_r$ $\quad \varphi(v_{r+1}) = 0_W$

$v_{r+1} \in \ker\varphi$

Q 10 : trouver les solutions d'un système linéaire

$$\varphi : V \to W \ni w_0$$

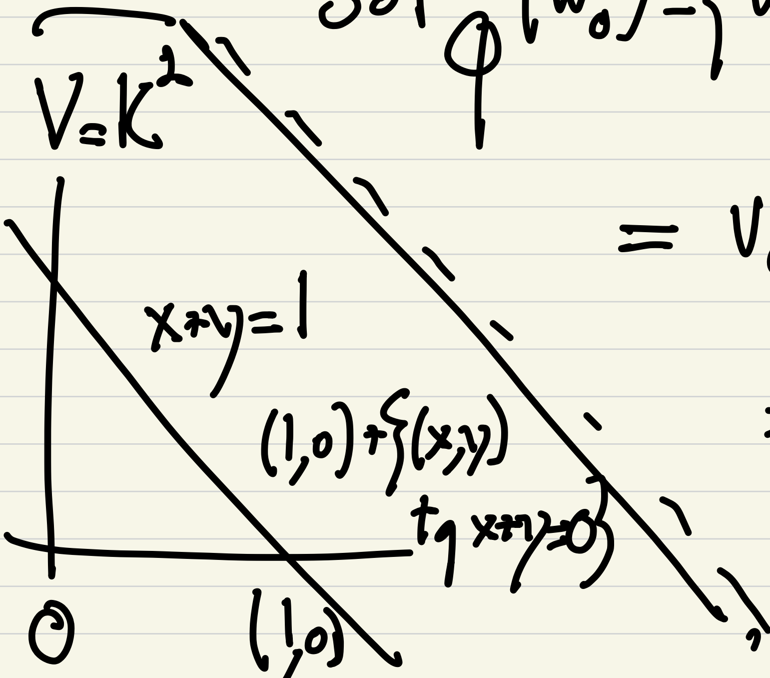
trouver tous les v tq $\varphi(v) = w_0$ (*)

l'ensemble des solution de (*) est le translaté de $\ker \varphi$ par une sol particulière si v_0 verifie $\varphi(v_0)=w_0$ alors

$$Sol_\varphi(w_0)=\{v\in V \ \ \varphi(v)=w_0\}$$

$$= v_0+\ker\varphi$$

$$=\{v_0+k \text{ avec } k\in\ker\varphi\}$$



Si $k_1, \dots, k_{d-r}$ st une base du noyau

alors

$$Sol_\varphi(v_0) = \{ v_0 + \lambda_1 k_1 + \dots + \lambda_{d-r} k_{d-r},\ \lambda_1, \dots, \lambda_{d-r} \in K \}$$

= representation parametrique

de $Sol_\varphi(v_0)$ dont les parametres

sont $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-r}$

Dém si $\ker \varphi = \{ v' \in V \text{ tq } l_1(v') = \dots = l_r(v') = 0 \}$

avec $l_1, \dots, l_r$ des formes linéaires

alors

$$Sol_\varphi(v_0) = \{ v_0 + v' \text{ avec } l_1(v') = \dots = l_r(v') = 0 \}$$

= représentation cartésienne

$$= \{ v \in V \text{ tq } l_1(v - v_0) = \dots = l_r(v - v_0) = 0 \}$$

on obtient cela en posant $v = v_0 + v'$

$$= \left\{ v \in V \text{ tq } \begin{array}{l} \ell_1(v) = \ell_1(v_0) \\ \ell_2(v) = \ell_2(v_0) \\ \vdots \\ \ell_r(v) = \ell_r(v_0) \end{array} \right\}$$

φ 11: Deux AL $\varphi : V \to W$
$\psi : V \to W$
sont egals ssi $\exists B \subset V$ base tq
$B = \{e_1, \dots, e_d\}$ tq
$\forall i = 1 \dots d \quad \varphi(e_i) = \psi(e_i)$

Preuve : Comme $\mathcal{B}$ est génératrice

$\forall v \in V \quad v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d$

$$\varphi(v) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_d \varphi(e_d)$$
$$= \lambda_1 \psi(e_1) + \dots + \lambda_d \psi(e_d)$$
$$= \psi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d) = \psi(v)$$

$\Rightarrow \varphi = \psi$ $\square$

Q12: Rep cartesienne vs parametrique

$V \supset V'$ un sev

une rep cartesienne

$V' = \{ v \in V \text{ tq } \ell_1(v) = \dots = \ell_n(v) = 0 \}$

où $\ell_1, \dots, \ell_n$ sont des formes lineaires si n est minimal parmi toutes les représentation cartesienne possible

alors $n = d - \dim V'$ et

$l_1, \dots, l_{d-\dim V'}$ sont linéairement indep.

Rep paramétrique :

$B' \subset V'$ une base

$B' = \{e'_1, \dots, e'_{d'}\}$ $d' = \dim V'$

$$V' = \{ v = \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_{d'} e'_{d'} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_{d'} \in K \}$$

$\Rightarrow$ rep paramétrique de paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_{d'}$